

# BAB 6 FUNGSI TRIGONOMETRI

## Bhgn 1

---

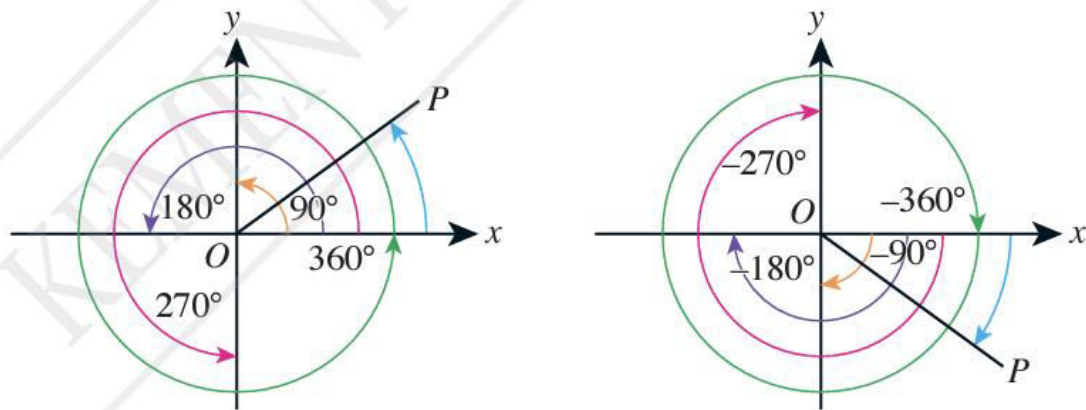
Matematik Tambahan Tingkatan 5 KSSM

Oleh Cikgu Norazila Khalid

Smk Ulu Tiram, Johor

# Sudut Positif dan Sudut Negatif

---



Mewakilkkan sudut positif dan sudut negatif dalam satah Cartes

- Sudut positif ialah sudut yang diukur mengikut lawan arah jam dari paksi-x yang positif.
- Sudut negatif ialah sudut yang diukur mengikut arah jam dari paksi x yang positif

Jika  $\theta$  ialah suatu sudut dalam sukuan dengan keadaan  $\theta > 360^\circ$ , maka kedudukan  $\theta$  boleh ditentukan dengan menolak gandaan  $360^\circ$  atau  $2\pi$  rad untuk memperoleh sudut sepadan dalam  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  atau  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  rad.

Mewakilkkan sudut positif dan sudut negatif dalam satah  
Cartes

---

Kedudukan suatu sudut boleh digambarkan dengan menggunakan satah Cartes.

**Contoh****1**

Tentukan kedudukan setiap sudut yang berikut pada sukuan masing-masing. Seterusnya, tunjukkan sudut tersebut dalam satah Cartes.

(a)  $800^\circ$

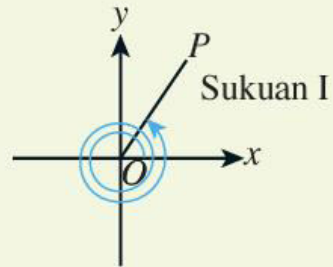
(b)  $\frac{19}{6}\pi$  rad

**Penyelesaian**

(a)  $800^\circ - 2(360^\circ) = 80^\circ$

$$800^\circ = 2(360^\circ) + 80^\circ$$

Maka,  $800^\circ$  berada di Sukuan I.



(b)  $\frac{19}{6}\pi$  rad  $- 2\pi$  rad  $= \frac{7}{6}\pi$  rad

$$\frac{19}{6}\pi$$
 rad  $= 2\pi$  rad  $+ \frac{7}{6}\pi$  rad

Maka,  $\frac{19}{6}\pi$  rad berada di Sukuan III.



## Latihan Mandiri 6.1

- Tukarkan setiap sudut yang berikut kepada unit radian.  
(a)  $290^\circ 10'$       (b)  $-359.4^\circ$       (c)  $620^\circ$       (d)  $-790^\circ$
- Tukarkan setiap sudut yang berikut kepada unit darjah.  
(a)  $1.3 \text{ rad}$       (b)  $\frac{13}{4} \text{ rad}$       (c)  $-2.7\pi \text{ rad}$       (d)  $\frac{13}{4}\pi \text{ rad}$
- Tentukan sukuan bagi setiap sudut berikut. Seterusnya, wakilkan setiap sudut tersebut dalam satah Cartes secara berasingan.  
(a)  $75^\circ$       (b)  $-340.5^\circ$       (c)  $550^\circ$       (d)  $-735^\circ$   
(e)  $0.36 \text{ rad}$       (f)  $-4 \text{ rad}$       (g)  $\frac{5}{3}\pi \text{ rad}$       (h)  $-\frac{20}{3}\pi \text{ rad}$

## Latihan Formatif

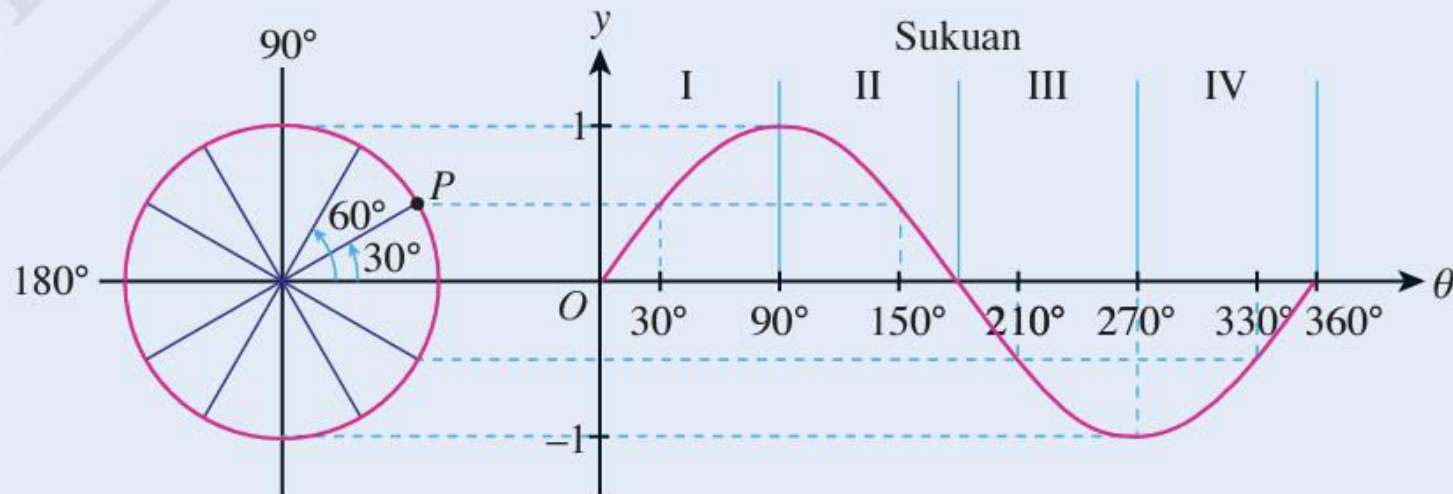
6.1

Kuiz

[bit.ly/2SuK9MF](https://bit.ly/2SuK9MF)



1. Rajah di bawah menunjukkan graf  $y = \sin \theta$  bagi  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ .



Tukarkan setiap sudut pada paksi- $\theta$  kepada unit radian. Seterusnya, tunjukkan setiap sudut tersebut dalam satah Cartes secara berasingan.

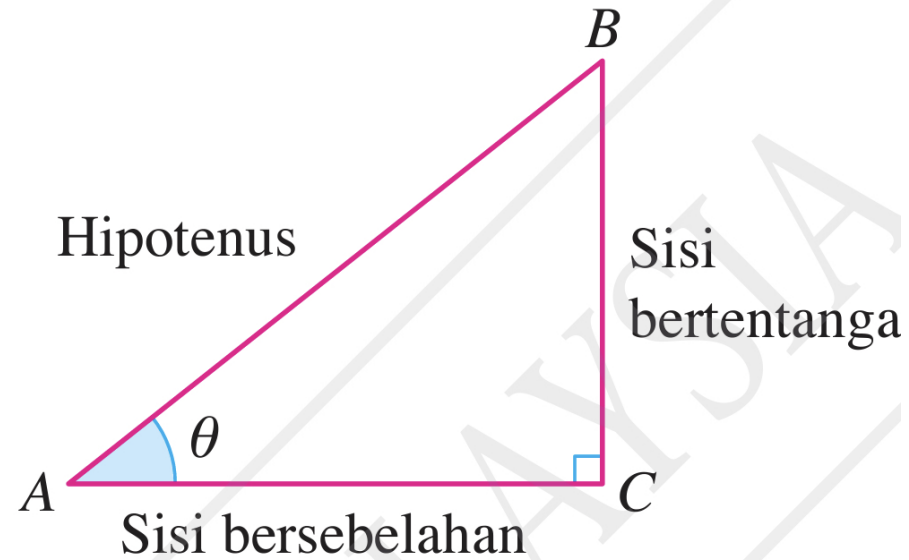
# Nisbah Trigonometri bagi Sebarang Sudut

---

$$\sin \theta = \frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{hipotenus}} = \frac{B}{A}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{sisi bersebelahan}}{\text{hipotenus}} = \frac{A}{A}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sisi bertentangan}}{\text{sisi bersebelahan}} = \frac{B}{A}$$



Perkaitan antara sekatan, kosekan dan kotangen dengan sinus, kosinus dan tangen bagi sebarang sudut dalam satah Cartes

---

Perkaitan antara  
sekan, kosekan dan  
kotangen dengan  
sinus, kosinus dan  
tangen bagi sebarang  
sudut dalam satah  
Cartes

- kosek  $\theta = \frac{\text{hipotenus}}{\text{sisi bertentangan}} = \frac{AB}{BC}$

- sek  $\theta = \frac{\text{hipotenus}}{\text{sisi bersebelahan}} = \frac{AB}{AC}$

- kot  $\theta = \frac{\text{sisi bersebelahan}}{\text{sisi bertentangan}} = \frac{AC}{BC}$

$$\text{kosek } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\text{sek } \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{kot } \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

**Contoh****2**

Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga  $ABC$  bersudut tegak di  $B$ . Diberi  $AB = 8$  cm dan  $BC = 6$  cm, tentukan nilai bagi

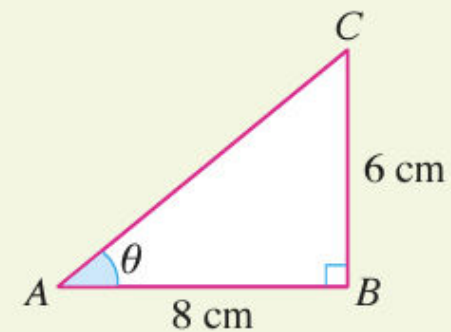
(a) kosek  $\theta$ (b) sek  $\theta$ (c) kot  $\theta$ **Penyelesaian**

Dengan menggunakan teorem Pythagoras,  $AC = \sqrt{6^2 + 8^2}$   
 $= 10$  cm

$$\begin{aligned} \text{(a) kosek } \theta &= \frac{10}{6} \\ &= 1.667 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) sek } \theta &= \frac{10}{8} \\ &= 1.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) kot } \theta &= \frac{8}{6} \\ &= 1.333 \end{aligned}$$



**Contoh 3**

Diberi  $\alpha = 56^\circ$ . Dengan menggunakan kalkulator, cari nilai bagi

(a) kosek  $\alpha$

(b) sek  $\alpha$

(c) kot  $\alpha$

**Penyelesaian**

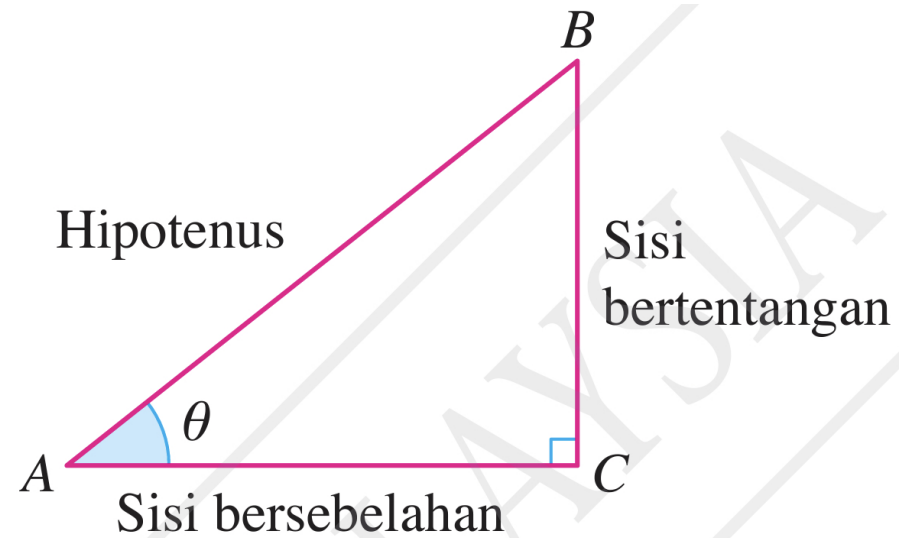
$$\begin{aligned} \text{(a) kosek } 56^\circ &= \frac{1}{\sin 56^\circ} \\ &= 1.206 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) sek } 56^\circ &= \frac{1}{\cos 56^\circ} \\ &= 1.788 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) kot } 56^\circ &= \frac{1}{\tan 56^\circ} \\ &= 0.675 \end{aligned}$$



$$A = 90^\circ - B \quad \text{dan} \quad B = 90^\circ - A$$



sudut pelengkap

---

- $\sin \theta = \cos (90^\circ - \theta)$

- $\sec \theta = \operatorname{cosec} (90^\circ - \theta)$

- $\cos \theta = \sin (90^\circ - \theta)$

- $\operatorname{cosec} \theta = \sec (90^\circ - \theta)$

- $\tan \theta = \cot (90^\circ - \theta)$

- $\cot \theta = \tan (90^\circ - \theta)$

rumus sudut pelengkap

---

Contoh

4

Diberi bahawa  $\sin 77^\circ = 0.9744$  dan  $\cos 77^\circ = 0.225$ . Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\cos 13^\circ$

(b)  $\operatorname{kosek} 13^\circ$

(c)  $\operatorname{kot} 13^\circ$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a) } \cos 13^\circ &= \sin (90^\circ - 13^\circ) \\ &= \sin 77^\circ \\ &= 0.9744 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \operatorname{kosek} 13^\circ &= \operatorname{sek} (90^\circ - 13^\circ) \\ &= \operatorname{sek} 77^\circ \\ &= \frac{1}{\cos 77^\circ} \\ &= \frac{1}{0.225} \\ &= 4.444 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \operatorname{kot} 13^\circ &= \tan (90^\circ - 13^\circ) \\ &= \tan 77^\circ \\ &= \frac{\sin 77^\circ}{\cos 77^\circ} \\ &= \frac{0.9744}{0.225} \\ &= 4.331 \end{aligned}$$

Contoh

5

Diberi  $\cos 63^\circ = k$ , dengan keadaan  $k > 0$ . Cari nilai bagi setiap yang berikut dalam sebutan  $k$ .

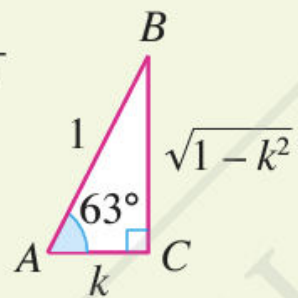
(a)  $\sin 63^\circ$

(b)  $\sin 27^\circ$

(c)  $\operatorname{kosek} 27^\circ$

Penyelesaian

(a)  $\sin 63^\circ$   
 $= \sqrt{1 - k^2}$



(b)  $\sin 27^\circ = \cos (90^\circ - 27^\circ)$   
 $= \cos 63^\circ$   
 $= k$

(c)  $\operatorname{kosek} 27^\circ = \sec (90^\circ - 27^\circ)$   
 $= \sec 63^\circ$   
 $= \frac{1}{\cos 63^\circ}$   
 $= \frac{1}{k}$

## Latihan Kendiri

### 6.2

1. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah segi tiga bersudut tegak  $PQR$ . Cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\cot R$                       (b)  $\sin^2 R$                       (c)  $\frac{\cos R - \sin R}{\operatorname{cosec} R}$

2. Diberi  $\tan \alpha = \frac{2}{3}$  dan  $\alpha$  ialah sudut tirus, cari

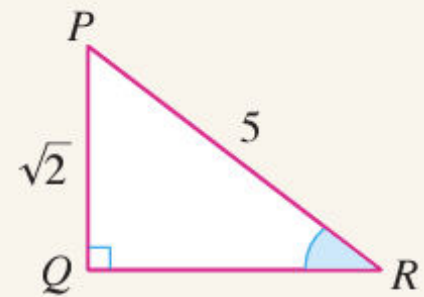
(a)  $\sin \alpha$                       (b)  $\cos^2 \alpha$                       (c)  $\cot \alpha$   
(d)  $\operatorname{cosec} \alpha$                       (e)  $\frac{4 - \sec^2 \alpha}{2 - \sec \alpha}$

3. Cari sudut pelengkap bagi setiap yang berikut.

(a)  $54^\circ$                                       (b)  $5^\circ 17' 14''$                                       (c)  $\frac{\pi}{5}$  rad

4. Diberi  $\cos 33^\circ = 0.839$  dan  $\sin 33^\circ = 0.545$ , cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\sin 57^\circ$                                       (b)  $\tan 57^\circ$                                       (c)  $\sec 57^\circ$



# Menentukan nilai nisbah trigonometri bagi sebarang sudut

---

- **Kaedah 1: Menggunakan kalkulator**
- **Kaedah 2: Menggunakan bulatan unit**
- **Kaedah 3: Menggunakan nilai nisbah trigonometri sudut rujukan yang sepadan**
- **Kaedah 4: Menggunakan segi tiga bersudut tegak**





## Kaedah 1: Menggunakan kalkulator

---

- Nilai sinus, kosinus dan tangen bagi sebarang sudut boleh ditentukan menggunakan kalkulator.
- Walau bagaimanapun, nilai bagi kosekan, sekan dan kotangen perlu dihitung menggunakan saling kepada nilai nisbah trigonometri sinus, kosinus dan tangen sudut tersebut.

Contoh

6

Dengan menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap nisbah trigonometri yang berikut, betul kepada empat angka bererti.

(a)  $\sin(-215^\circ 12')$

(b)  $\sec(-4.14 \text{ rad})$

Penyelesaian

(a) 0.5764

$$\begin{aligned} \text{(b) } \sec(-4.14 \text{ rad}) &= \frac{1}{\cos(-4.14)} \\ &= -1.846 \end{aligned}$$



### PERBINCANGAN

Bincangkan cara untuk mencari nisbah trigonometri bagi sudut dalam unit radian.

## Kaedah 2: Menggunakan bulatan unit

Contoh

7

Dengan menggunakan bulatan unit di sebelah, nyatakan nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\cos 135^\circ$

(b)  $\operatorname{cosec} \left(-\frac{\pi}{4} \text{ rad}\right)$

Penyelesaian

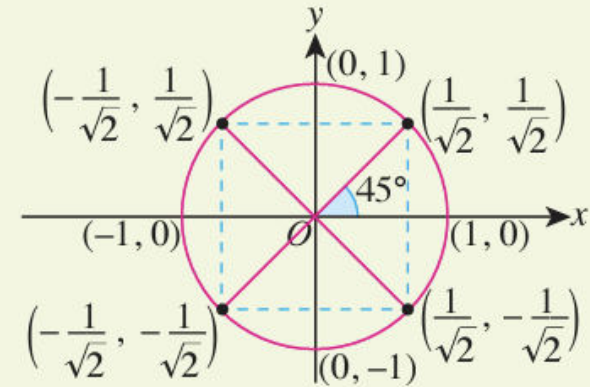
(a) Koordinat yang sepadan dengan  $135^\circ$  ialah  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  dan  $\cos 135^\circ = \text{koordinat-}x$ .

$$\text{Maka, } \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

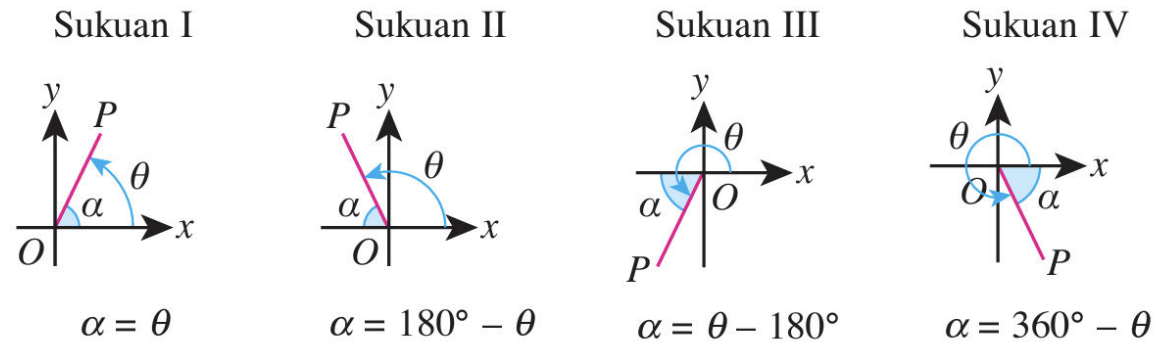
(b) Koordinat yang sepadan dengan  $-\frac{\pi}{4} \text{ rad}$  ialah  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  dan

$$\operatorname{cosec} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\text{koordinat-}y}.$$

$$\text{Maka, } \operatorname{cosec} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$



Rajah di bawah menunjukkan sudut rujukan,  $\alpha$  bagi sudut  $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$  atau  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .



Kaedah 3: Menggunakan nilai nisbah trigonometri sudut rujukan yang sepadan

---

Suku	Tanda bagi							
	$x$	$y$	$\sin \theta = \frac{y}{r}$	$\cos \theta = \frac{x}{r}$	$\tan \theta = \frac{y}{x}$	$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{x}{y}$
I	+	+	+	+	+	+	+	+
II	-	+	+	-	-	+	-	-
III	-	-	-	-	+	-	-	+
IV	+	-	-	+	-	-	+	-

Kaedah 3: Menggunakan nilai nisbah trigonometri sudut rujukan yang sepadan

---

Contoh

8

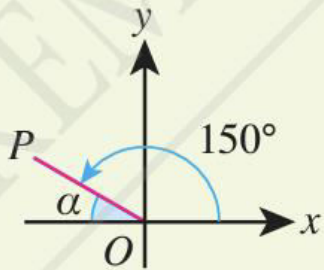
Diberi  $\sin 30^\circ = 0.5$  dan  $\cos 30^\circ = 0.866$ , cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\sec 150^\circ$

(b)  $\sec\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$

Penyelesaian

(a)



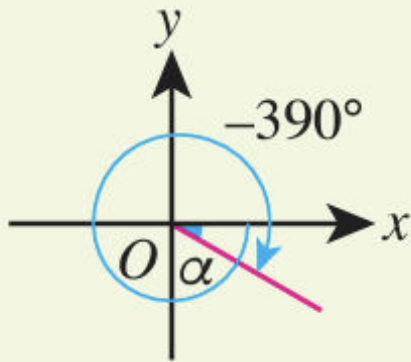
$\theta = 150^\circ$  terletak pada Sukuan II.  
Tanda  $\sec 150^\circ$  adalah negatif.

Sudut rujukan,  $\alpha = 180^\circ - 150^\circ$   
 $= 30^\circ$

$$\begin{aligned}\sec 150^\circ &= -\sec 30^\circ \\ &= -\frac{1}{\cos 30^\circ} \\ &= -\frac{1}{0.866} \\ &= -1.155\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{(b) } \theta &= -\frac{13}{6}\pi \times \frac{180}{\pi} \\ &= -390^\circ \end{aligned}$$



$-390^\circ$  terletak pada sukuan IV. Tanda bagi sek ( $-390^\circ$ ) adalah positif.

Sudut rujukan,

$$\begin{aligned} \alpha &= 390^\circ - 360^\circ \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sek} \left( -\frac{13}{6}\pi \right) &= \text{sek} (-390^\circ) \\ &= \text{sek } 30^\circ \\ &= \frac{1}{\text{kos } 30^\circ} \\ &= \frac{1}{0.866} \\ &= 1.155 \end{aligned}$$

**Contoh****9**

Diberi  $\cos A = \frac{2}{5}$  dan  $270^\circ \leq A \leq 360^\circ$ , cari nilai bagi setiap yang berikut.

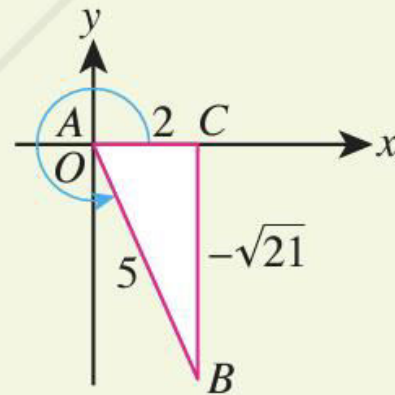
(a)  $\tan A$ (b)  $\sin A$ (c)  $\sec A$ **Penyelesaian**

$$BC = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

$$(a) \tan A = -\frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$(b) \sin A = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$(c) \sec A = \frac{5}{2}$$



Kaedah 4:  
Menggunakan  
segi tiga  
bersudut  
tegak

Sudut \ Nisbah		sin	kos	tan	kosek	sek	kot
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Contoh

10

Dengan menggunakan nisbah trigonometri bagi sudut-sudut khas, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\cos 315^\circ$       (b)  $\cot \left(\frac{5}{3}\pi\right)$       (c)  $\sec(-480^\circ)$

Penyelesaian

$$\begin{aligned} \text{(a) } \cos(315^\circ) &= \cos(360^\circ - 315^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } \cot\left(\frac{5}{3}\pi\right) &= \cot 300^\circ \\ &= -\cot(360^\circ - 300^\circ) \\ &= -\cot 60^\circ \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c) } \sec(-480^\circ) &= \sec(-480^\circ - (-360^\circ)) \\ &= \sec(-120^\circ) \\ &= -\sec 60^\circ \\ &= -2 \end{aligned}$$



### Latihan Kendiri 6.3

1. Cari nilai bagi setiap yang berikut menggunakan kalkulator. Berikan jawapan anda betul kepada empat tempat perpuluhan.

(a)  $\tan 165.7^\circ$       (b)  $\cot(-555^\circ)$       (c)  $\operatorname{cosec}^2(-1.2 \text{ rad})$       (d)  $\operatorname{sek}\left(-\frac{16}{9}\pi\right)$

2. Dengan menggunakan bulatan unit di sebelah, cari nilai bagi setiap yang berikut.



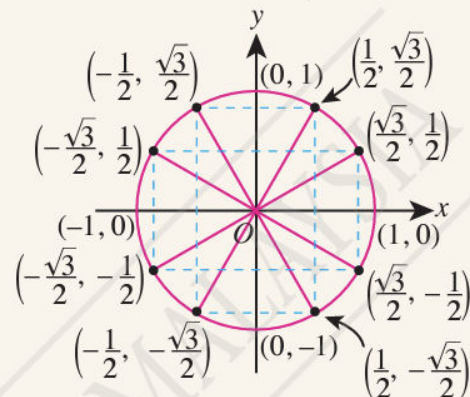
(a)  $\sin 330^\circ$       (b)  $\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right)$   
 (c)  $\cot\left(\frac{7}{6}\pi\right)$       (d)  $\cos 600^\circ$   
 (e)  $\operatorname{cosec}\left(-\frac{7}{2}\pi\right)$       (f)  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sek} 3\pi$

3. Cari sudut tirus yang sepadan dengan sudut-sudut yang berikut.

(a)  $335^\circ$       (b)  $\frac{2}{3}\pi \text{ rad}$       (c)  $\frac{7}{3}\pi \text{ rad}$       (d)  $710^\circ$

4. Dengan menggunakan nisbah trigonometri bagi sudut-sudut khas, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\operatorname{sek} 150^\circ$       (b)  $\operatorname{cosec} 240^\circ$       (c)  $\cot 315^\circ$   
 (d)  $\sin 45^\circ + \cos 225^\circ$       (e)  $\operatorname{sek} 60^\circ + 2 \operatorname{cosec} 30^\circ$       (f)  $\operatorname{sek} \pi + \cos \frac{\pi}{2}$



## Latihan Formatif

6.2

Kuiz

[bit.ly/2Q2zya4](https://bit.ly/2Q2zya4)



1. Diberi  $\tan x = 3t$  bagi  $0^\circ < x < 90^\circ$ , ungkapkan setiap yang berikut dalam sebutan  $t$ .  
(a)  $\cot x$  (b)  $\sec(90^\circ - x)$  (c)  $\csc(180^\circ - x)$
2. Sudut  $\theta$  terletak dalam sukuan III dan  $\tan \theta = 3$ . Cari nilai bagi setiap yang berikut.  
(a)  $\cot \theta$  (b)  $\tan(\pi + \theta)$  (c)  $\sin(-\theta)$
3. Dengan menggunakan nisbah trigonometri sudut-sudut khas, cari  
(a)  $2 \sin 45^\circ + \cos 585^\circ$  (b)  $\tan 210^\circ - \cot(-240^\circ)$   
(c)  $\csc \frac{5}{6}\pi + \sin \frac{1}{6}\pi$  (d)  $\tan 2\pi - 6 \csc \frac{3}{2}\pi$





4. Tanpa menggunakan kalkulator, cari nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\sin 137^\circ$  jika  $\sin 43^\circ \approx 0.6820$

(b)  $\sec 24^\circ$  jika  $\sec 336^\circ \approx 1.095$

(c)  $\tan 224^\circ$  jika  $\tan 44^\circ \approx 0.9656$

(d)  $\cot 15^\circ$  jika  $\cot 195^\circ \approx 3.732$

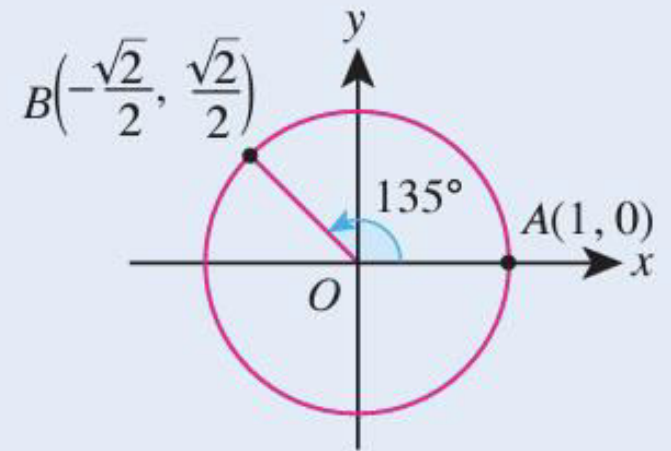
5. Rajah di sebelah menunjukkan bulatan unit yang mewakili sudut  $135^\circ$ . Berdasarkan maklumat dalam bulatan unit tersebut, nyatakan nilai bagi setiap yang berikut.

(a)  $\sin 135^\circ$

(b)  $\sec 135^\circ$

(c)  $\cot 45^\circ$

(d)  $\operatorname{cosec}(-45^\circ)$



# Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen

---

# Graf Fungsi Sinus, Kosinus dan Tangen

- Rajah di sebelah menunjukkan ritma degupan jantung seorang individu yang normal. Ritma ini dikenali sebagai Normal Sinus Rhythm. Perhatikan bahawa bentuk ritma yang terhasil merupakan satu contoh graf fungsi trigonometri. Graf bagi fungsi trigonometri  $y = a \sin bx + c$ ,  $y = a \cos bx + c$  dan  $y = a \tan bx + c$ , dengan keadaan  $a$ ,  $b$  dan  $c$  ialah pemalar dan  $b \neq 0$  boleh dilukis menggunakan sebarang perisian geometri dinamik atau dilukis secara manual menggunakan jadual dan kertas graf.



# Graf bagi fungsi trigonometri

- Graf  $y = \sin x$  dan  $y = \cos x$  berbentuk sinusoidal dan mempunyai ciri-ciri yang berikut:

- (a) Nilai maksimum ialah 1 manakala nilai minimum ialah  $-1$ , maka amplitud graf ialah 1 unit.
- (b) Bentuk graf berulang setiap selang  $360^\circ$  atau  $2\pi$  rad, maka  $360^\circ$  atau  $2\pi$  rad ialah kala bagi kedua-dua graf itu.

- Graf  $y = \tan x$  pula tidak berbentuk sinusoidal. Ciri-ciri graf  $y = \tan x$  adalah seperti yang berikut:

- (a) Graf ini tidak mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum.
- (b) Bentuk graf berulang setiap selang  $180^\circ$  atau  $\pi$  rad, maka kala bagi graf tangen ialah  $180^\circ$  atau  $\pi$  rad.
- (c) Fungsi  $y = \tan x$  tidak tertakrif pada  $x = 90^\circ$  dan  $x = 270^\circ$ . Lengkung graf menghampiri garis  $x = 90^\circ$  dan  $x = 270^\circ$  tetapi tidak menyentuh garis tersebut. Garis tersebut dinamakan sebagai asimptot.

# Graf bagi fungsi trigonometri

1 Graf  $y = \sin x$  untuk  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

(a) Amplitud = 1

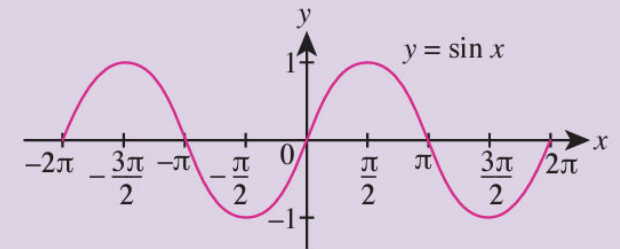
(i) Nilai maksimum  $y = 1$

(ii) Nilai minimum  $y = -1$

(b) Kala =  $360^\circ$  atau  $2\pi$

(c) Pintas- $x$ :  $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$

(d) Pintas- $y$ : 0



2 Graf  $y = \cos x$  untuk  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

(a) Amplitud = 1

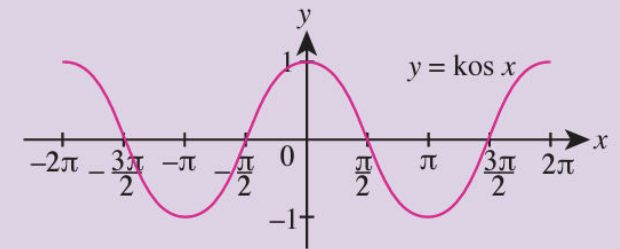
(i) Nilai maksimum  $y = 1$

(ii) Nilai minimum  $y = -1$

(b) Kala =  $360^\circ$  atau  $2\pi$

(c) Pintas- $x$ :  $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$

(d) Pintas- $y$ : 1



3 Graf  $y = \tan x$  untuk  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

(a) Tiada amplitud

(i) Tiada nilai maksimum  $y$

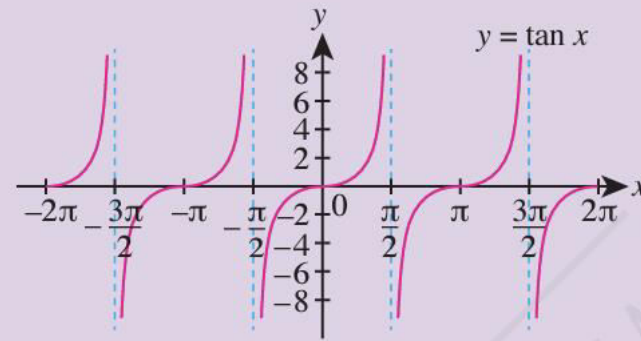
(ii) Tiada nilai minimum  $y$

(b) Kala =  $180^\circ$  atau  $\pi$

(c) Asimptot- $x$ :  $-\frac{3}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$

(d) Pintasan- $x$ :  $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$

(e) Pintasan- $y$ : 0



# Graf bagi fungsi trigonometri

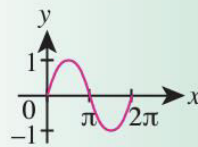
$$y = a \sin bx + c$$

$a$

- Jika  $c = 0$ :  
Amplitud =  $|a|$ , Nilai maksimum  $y = a$ , Nilai minimum  $y = -a$
- Jika  $c \neq 0$ :  
Amplitud =  $|a|$  atau  
$$\frac{(\text{nilai maksimum} - \text{nilai minimum})}{2}$$

$\sin$

Bentuk graf:



$b$

- Bilangan kitaran dalam julat  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$  atau  $0 \leq x \leq 2\pi$
- Kala =  $\frac{360^\circ}{b}$   
 $= \frac{2}{b}\pi$

$c$

Translasi  
 $\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$   
dari graf  
asas.

# Graf bagi fungsi trigonometri

# Graf bagi fungsi trigonometri

---

Perubahan	Kesan
<b><i>a</i></b>	Nilai maksimum dan minimum graf (kecuali untuk graf $y = \tan x$ yang tiada nilai maksimum atau minimum)
<b><i>b</i></b>	Bilangan kitaran dalam julat $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ atau $0 \leq x \leq 2\pi$ : <ul style="list-style-type: none"><li>• Graf <math>y = \sin x</math> dan <math>y = \cos x</math> (kala = <math>\frac{360^\circ}{b}</math> atau <math>\frac{2}{b}\pi</math>)</li><li>• Graf <math>y = \tan x</math> (kala = <math>\frac{180^\circ}{b}</math> atau <math>\frac{1}{b}\pi</math>)</li></ul>
<b><i>c</i></b>	Kedudukan graf merujuk kepada paksi- $x$ berbanding dengan kedudukan graf asas

Contoh

11

Lukis graf  $y = 3 - 2 \cos \frac{3}{2}x$  untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Penyelesaian

Bagi menentukan saiz selang kelas:

$$b = \frac{3}{2}, \text{ Kala} = 2\pi \div \frac{3}{2} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\begin{aligned} \text{Saiz selang kelas} &= \left(\frac{4}{3}\pi\right) \div 8 \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$



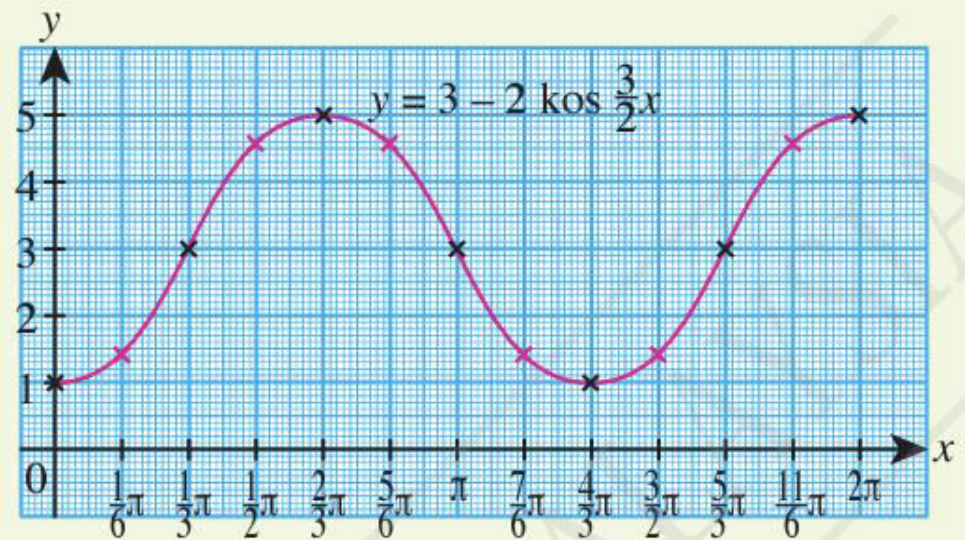
Tip Pintar

Bagi melukis graf fungsi trigonometri, kita memerlukan sekurang-kurangnya lapan titik untuk satu kitaran.



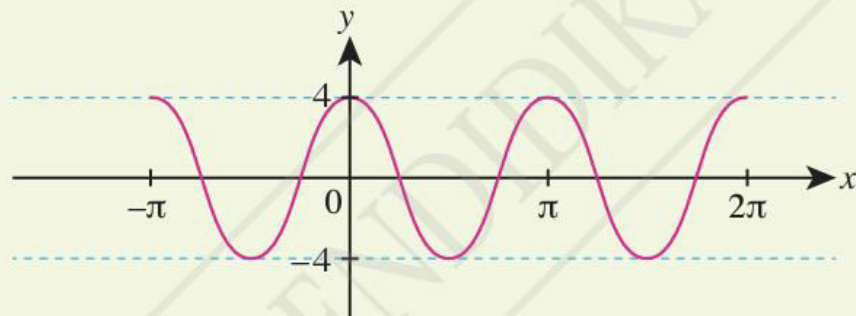
$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$2\pi$
$y = 3 - 2 \cos \frac{3}{2}x$	1	1.59	3	4.41	5	4.4	3	1.59	1	1.59	3	4.41	5

Graf  $y = 2 \cos \frac{3}{2}x$  dipantulkan pada paksi- $x$   
dan diikuti dengan translasi  $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .



**Contoh 12**

Nyatakan fungsi kosinus yang diwakili oleh graf dalam rajah di bawah.

**Penyelesaian**

Perhatikan bahawa amplitud ialah 4.

Jadi,  $a = 4$ .

Dua kitaran dalam julat  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Kala ialah  $\pi$ , iaitu  $\frac{2\pi}{b} = \pi$ , jadi  $b = 2$ .

Maka, graf mewakili  $y = 4 \cos 2x$

Contoh

13

Diberi  $f(x) = 3 \sin 2x$  untuk  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .

- (a) Nyatakan kala bagi graf fungsi  $y = f(x)$ . Seterusnya, nyatakan bilangan kitaran graf dalam julat tersebut.
- (b) Nyatakan amplitud bagi graf tersebut.
- (c) Tuliskan koordinat bagi titik maksimum dan titik minimum.
- (d) Lakarkan graf fungsi  $y = f(x)$ .
- (e) Pada paksi yang sama, lakarkan graf fungsi  $y = -3 \sin 2x$ .





### Penyelesaian

- (a) Kala bagi graf fungsi  $y = f(x)$  ialah  $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ .  
Bilangan kitaran ialah 2.
- (b) Amplitud bagi graf ialah 3.
- (c) Titik maksimum ialah  $(45^\circ, 3)$  dan  $(225^\circ, 3)$  manakala titik minimum ialah  $(135^\circ, -3)$  dan  $(315^\circ, -3)$ .
- (d) Bagi melakar graf fungsi  $y = 3 \sin 2x$ ,  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ :  
Bilangan kelas =  $2 \times 2 \times 2$

$$= 8$$

$$\text{Saiz selang kelas} = \frac{360^\circ}{8}$$

$$= 45^\circ$$

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
y	0	3	0	-3	0	3	0	-3	0

Plotkan titik:  $(0^\circ, 0)$ ,  $(45^\circ, 3)$ ,  $(90^\circ, 0)$ ,  $(135^\circ, -3)$ ,  $(180^\circ, 0)$ ,  $(225^\circ, 3)$ ,  $(270^\circ, 0)$ ,  $(315^\circ, -3)$ ,  $(360^\circ, 0)$

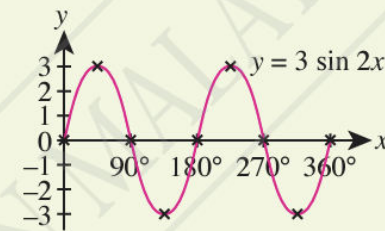


### Tip Pintar

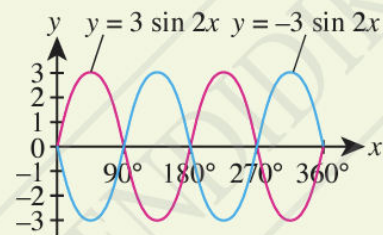
Bagi melakar graf

$$y = a \sin bx + c, 0 \leq x \leq n\pi:$$

- Bilangan kelas diperlukan ialah  $b \times n \times 2 = m$
- Saiz selang kelas =  $\frac{n\pi}{m}$



- (e) Lakaran graf fungsi  $y = -3 \sin 2x$  merupakan pantulan graf  $y = 3 \sin 2x$  pada paksi-x.



**Contoh 14**

Nyatakan transformasi bagi graf fungsi  $y = \tan x$  untuk mendapatkan graf bagi setiap yang berikut.

(a)  $y = |-\tan x|$

(b)  $y = -|\tan x|$

Seterusnya, lakarkan kedua-dua graf tersebut untuk  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

**Penyelesaian**

Kala =  $\pi$  rad

(a) Pantulan graf  $y = \tan x$  pada paksi- $x$  memberikan graf

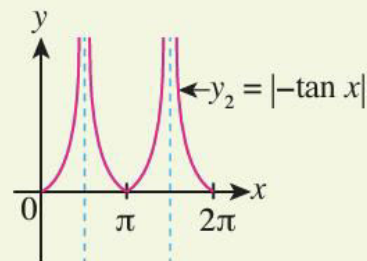
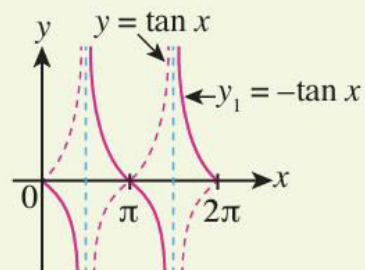
$y_1 = -\tan x$  diikuti dengan pantulan bahagian negatif graf

$y_1 = -\tan x$  pada paksi- $x$  untuk mendapatkan graf

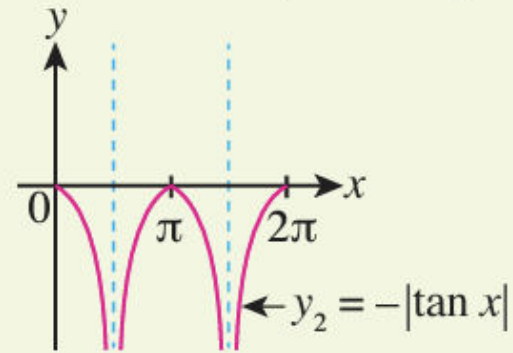
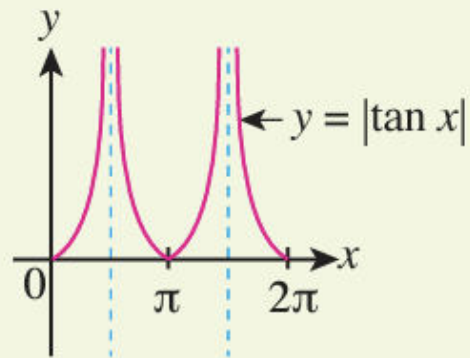
$y_2 = |-\tan x|$ .

**Imbas Kembali**

Kala bagi graf  $y = \tan x$  ialah  $180^\circ$  atau  $\pi$  rad.



(b) Pantulan bahagian negatif graf  $y = \tan x$  pada paksi- $x$  memberikan graf  $y_1 = |\tan x|$  diikuti dengan pantulan graf  $y_1 = |\tan x|$  pada paksi- $x$  untuk mendapatkan graf  $y_2 = -|\tan x|$ .

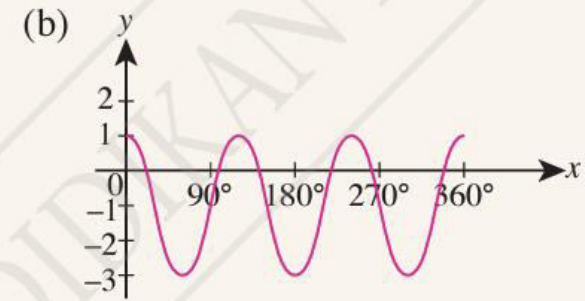
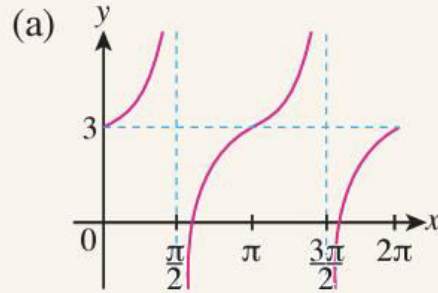


## Latihan Kendiri 6.4

1. Lakarkan graf bagi setiap fungsi yang berikut pada kertas graf. Seterusnya, semak graf anda menggunakan perisian geometri dinamik.

(a)  $y = 1 - 3 \sin 2x$  untuk  $-90^\circ \leq x \leq 180^\circ$  (b)  $f(x) = -|\tan 2x| + 1$  untuk  $0 \leq x \leq \pi$

2. Nyatakan fungsi yang diwakili oleh setiap graf yang berikut.



3. Diberi  $f(x) = A \sin Bx + C$  untuk  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ . Amplitud bagi graf itu ialah 3, kala ialah  $90^\circ$  dan nilai minimum bagi  $f(x)$  ialah  $-2$ .

(a) Nyatakan nilai  $A$ ,  $B$  dan  $C$ .

(b) Lakarkan graf bagi fungsi tersebut.

4. Salin dan lengkapkan jadual berikut.



Fungsi	Amplitud	Bilangan kitaran/Kala	Translasi	Lakaran graf $0 \leq x \leq \pi$
$y = \frac{3}{2} \sin 3x$				
$y =  \tan 2x  + 1$				



**Contoh 15**

Pada paksi yang sama, lukis graf  $y = \sin 2x$  dan  $y = \frac{x}{2\pi}$  dalam julat  $0 \leq x \leq \pi$ . Seterusnya, nyatakan penyelesaian bagi persamaan trigonometri  $2\pi \sin 2x - x = 0$ .

Menyelesaikan persamaan trigonometri dengan kaedah graf

---

**ANSWER**

### Penyelesaian

Bagi fungsi  $y = \sin 2x$ :

$x$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\pi$
$y$	0	0.71	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0

Julat =  $\pi$

Saiz selang kelas =  $\frac{\pi}{8}$

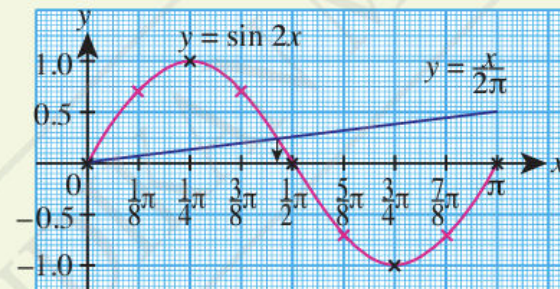
Bagi garis lurus  $y = \frac{x}{2\pi}$ :

$x$	0	$\pi$
$y$	0	0.5
<b>Titik</b>	(0, 0)	( $\pi$ , 0.5)

Graf  $y = \sin 2x$  dan  $y = \frac{x}{2\pi}$ :

Titik persilangan kedua-dua graf ialah penyelesaian kepada  $\sin 2x = \frac{x}{2\pi}$  atau  $2\pi \sin 2x - x = 0$

Daripada graf, didapati bahawa penyelesaian bagi persamaan  $2\pi \sin 2x - x = 0$  ialah 0 dan  $0.46\pi$ .



Contoh

16

Lakarkan graf  $y = 3 \cos 2x + 2$  bagi  $0 \leq x \leq \pi$ . Seterusnya, tentukan bilangan penyelesaian bagi persamaan trigonometri berikut.

(a)  $3x \cos 2x = \pi - 2x$

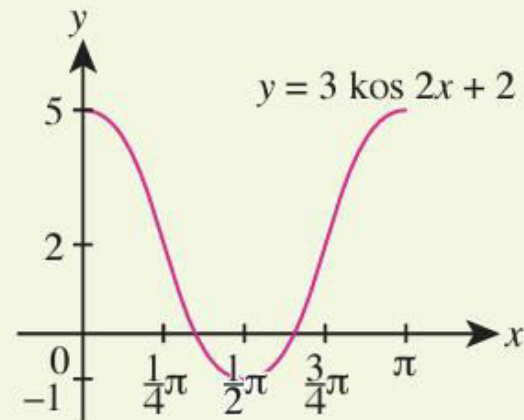
(b)  $3\pi \cos 2x = 8x - \pi$

Penyelesaian

Diberi  $y = 3 \cos 2x + 2$

Bilangan kelas =  $(2 \times 1) \times 2 = 4$

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$y$	5	2	-1	2	5



(a) Untuk menentukan bilangan penyelesaian bagi  $3x \cos 2x = \pi - 2x$ ,

$$3x \cos 2x + 2x = \pi$$

$$x(3 \cos 2x + 2) = \pi$$

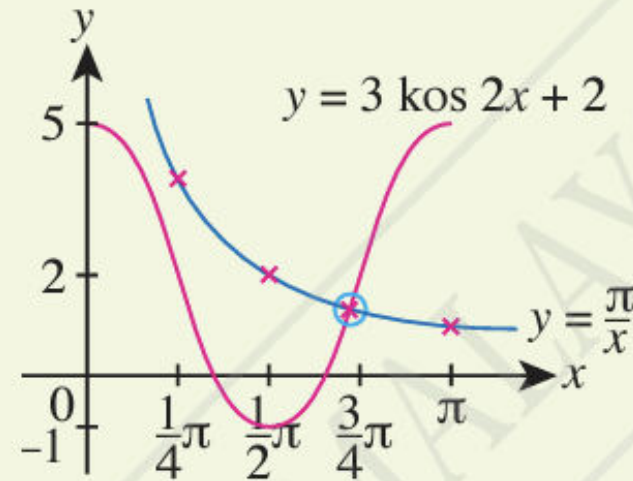
$$3 \cos 2x + 2 = \frac{\pi}{x}$$

Jadi,  $y = 3 \cos 2x + 2$  dan  $y = \frac{\pi}{x}$ .

Bagi  $y = \frac{\pi}{x}$ :

<b>x</b>	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
<b>y</b>	$\infty$	4	2	1
<b>Titik</b>	-	$(\frac{\pi}{4}, 4)$	$(\frac{\pi}{2}, 2)$	$(\pi, 1)$

Maka, bilangan penyelesaian = 1.



(b) Untuk menentukan bilangan penyelesaian bagi  $3\pi \cos 2x = 8x - \pi$ .

$$3\pi \cos 2x + \pi = 8x$$

$$\pi(3 \cos 2x + 1) = 8x$$

$$3 \cos 2x + 1 = \frac{8x}{\pi}$$

$$3 \cos 2x + 1 + 1 = \frac{8x}{\pi} + 1$$

$$\text{Jadi, } y = 3 \cos 2x + 2 \text{ dan } y = \frac{8x}{\pi} + 1$$

$$\text{Bagi } y = \frac{8x}{\pi} + 1:$$

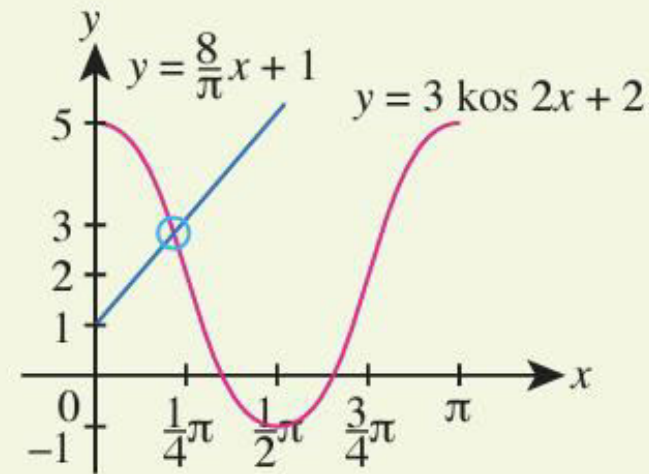
<b>x</b>	0	$\frac{1}{4}\pi$
<b>y</b>	1	3
<b>Titik</b>	(0, 1)	$(\frac{1}{4}\pi, 3)$

Maka, bilangan penyelesaian = 1.



**Tip Pintar**

Hanya dua titik sahaja diperlukan untuk melakar graf fungsi linear.



## Latihan Kendiri 6.5

1. Dengan menggunakan skala yang bersesuaian,

(a) lukiskan graf yang berikut bagi  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .

(i)  $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

(ii)  $y = 2 - \cos x$

(iii)  $y = -\tan 2x + 1$

(b) lukiskan graf yang berikut bagi  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

(i)  $y = 3 \cos 2x$

(ii)  $y = -3 \sin x + 2$

(iii)  $y = |\tan x| - 1$

2. Lakarkan graf fungsi  $y = -2 |\sin 2x| + 1$  bagi  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

3. Pada paksi yang sama, lakarkan graf fungsi  $y = \frac{3}{2} \cos 3x$  dan  $y = \frac{x}{\pi} + 1$  bagi  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .



Seterusnya, nyatakan bilangan penyelesaian untuk  $3 \cos 3x = \frac{2x}{\pi} + 2$  bagi  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

4. Tentukan bilangan penyelesaian bagi  $x - 2\pi |\cos 2x| = 0$  untuk  $0 \leq x \leq \pi$  dengan melakarkan dua graf yang bersesuaian.

## Latihan Formatif

6.3

Kuiz

[bit.ly/37k9eON](https://bit.ly/37k9eON)



1. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada 0.5 unit pada paksi- $x$  dan paksi- $y$ , lukis graf  $y = 2 \cos \frac{\pi}{2}x$  bagi  $0 \leq x \leq 4$ . Daripada graf yang diperoleh, anggarkan nilai-nilai  $x$  yang memuaskan persamaan  $\cos \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4} = 0$  bagi julat  $0 \leq x \leq 4$ .
2. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada  $\frac{\pi}{6}$  rad pada paksi- $x$  dan 1 cm kepada 1 unit pada paksi- $y$ , lukis graf  $y = 5 \tan x$  bagi  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ . Pada paksi yang sama, lukis garis lurus yang bersesuaian untuk menyelesaikan persamaan  $30 \tan x - 6x + 5\pi = 0$  bagi julat  $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ . Seterusnya, cari nilai  $x$  dalam unit radian.
3. Lakarkan graf  $y = 3 \sin 2x$  bagi  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Seterusnya, menggunakan paksi-paksi yang sama, lukis garis lurus yang bersesuaian untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan  $3\pi \sin 2x + 2x = 3\pi$ . Nyatakan bilangan penyelesaian tersebut.

4. Lakarkan graf  $y = |\cos 2x|$  bagi  $0 \leq x \leq \pi$ . Pada paksi yang sama, lakarkan garis lurus yang bersesuaian untuk mencari bilangan penyelesaian bagi persamaan  $x - 2\pi |\cos 2x| = 0$ . Seterusnya, nyatakan bilangan penyelesaian tersebut.
5. Dengan menggunakan skala 2 cm kepada  $\frac{\pi}{4}$  rad pada paksi- $x$  dan 2 cm kepada 1 unit pada paksi- $y$ , lukis graf fungsi trigonometri  $y = 1 + \sin 2x$  dan  $y = |2 \cos 2x|$  bagi  $0 \leq x \leq 2\pi$  pada paksi yang sama. Seterusnya, nyatakan koordinat titik-titik persilangan bagi kedua-dua graf itu.
6. Dengan melakarkan graf  $y = 3 + |\cos x|$  bagi  $0 \leq x \leq 2\pi$ , cari julat nilai  $k$  dengan keadaan  $|\cos x| = k - 3$  tidak mempunyai punca nyata.
7. (a) Lakarkan graf  $y = -2 \cos \frac{3x}{2}$  bagi  $0 \leq x \leq 2\pi$ .  
(b) Seterusnya, dengan menggunakan paksi yang sama, lakarkan satu graf yang bersesuaian untuk menyelesaikan persamaan  $2 \cos \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{2x} = 0$  bagi  $0 \leq x \leq 2\pi$ . Nyatakan bilangan penyelesaian tersebut.



# Bersambung

---